série de révision n°2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

① a) Etudier les variations de f. En déduire que pour tout $x \geqslant \dfrac{\ln 2}{2}$, on a : $0<f(x)\leqslant 1$.

b) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

② On pose $g(x)=-\ln(\cos x)$, $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $h\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $h'(x)=f(x)$.

c) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} f(t)dt=h(x)-\frac{\pi}{4}$.

③ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\geqslant\dfrac{\ln 2}{2}$, on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x}(f(t))^n dt$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F_1(x)=\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que pour tout $t>0$, $[f(t)]^2=\dfrac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$. Calculer alors $F_2(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F_2(x)$.

c) Montrer que F_n est strictement croissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

d) Vérifier que pour tout $t\geqslant\dfrac{\ln 2}{2}$, $f(t)\leqslant 2e^{-t}$. En déduire que $F_n(x)<\sqrt{2}$.

e) Montrer alors que F_n admet une limite finie u_n quand x tend vers ∞.

④ a) Donner les valeurs de u_1 et u_2.

b) Vérifier que pour tout $t>0$, $[f(t)]^{n+2}+[f(t)]^n=-f'(t)\cdot f(t)$.

En déduire $F_{n+2}(x)+F_n(x)=\dfrac{1-[f(x)]^n}{n}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+2}+u_n=\dfrac{1}{n}$ et que u est décroissante en déduire que u est convergente et calculer sa limite.

⑤ On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n+2}=\dfrac{(-1)^n}{2}(\ln 2-v_n)$.

En déduire que v est convergente et déterminer sa limite.

Correction de l'exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

① ⓐ Etudier les variations de g.

La fonction $x\longmapsto e^{2x}-1$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$

donc la fonction $x\longmapsto\sqrt{e^{2x}-1}$ est dérivable est ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$

alors $f:x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{2\,e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}}}{\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)^2}=\frac{-\,e^{2x}}{(\,e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}=0.$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	−
f(x)	‖	$+\infty$ ↘ 0

En déduire que pour tout $x\geqslant\dfrac{\ln 2}{2}$, on a : $0<f(x)\leqslant1$.

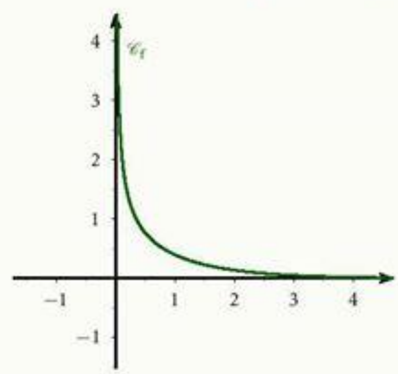
Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}>0$.

f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

donc : $x\geqslant\dfrac{\ln 2}{2}\implies f(x)\leqslant f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=1$.

Ainsi pour tout $x\in]0,+\infty[$, $0<f(x)\leqslant1$.

ⓑ Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



② On pose $g(x)=-\ln(\cos x)$, $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

ⓐ Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x\longmapsto\cos x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

donc g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$g'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}>0$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

alors g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

par suite elle réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim\limits_{0^+} g,\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g\right[=]0,+\infty[$.

Calculer $h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$.

Soit $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=y &\iff g(y)=\frac{\ln 2}{2}\\
&\iff -\ln(\cos y)=\frac{\ln 2}{2}\\
&\iff \ln(\cos y)=-\frac{\ln 2}{2}\\
&\iff \cos y=e^{-\frac{\ln 2}{2}}\\
&\iff \cos y=\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&\iff \cos y=2^{-\frac{1}{2}}\\
&\iff \cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff y=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

b) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $h'(x)=f(x)$.

g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x)=\frac{\sin x}{\cos x}\neq 0$ pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

alors $h=g^{-1}$ est dérivable sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$.

Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $h'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{\cos y}{\sin y}$ avec $y=h(x)$.

$y=h(x)\iff h(y)=x\iff -\ln(\cos y)=x\iff \cos y=e^{-x}$.

Or $\cos^2 y+\sin^2 y=1$ et $\sin y>0$ car $y\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-e^{-2x}}$.

Ainsi $h'(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\frac{e^{x}\cdot e^{-x}}{e^{x}\cdot\sqrt{1-e^{-2x}}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}\cdot(1-e^{-2x})}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}=f(x)$.

c) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} f(t)dt=h(x)-\frac{\pi}{4}$.

$\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} f(t)dt=\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} h'(t)dt=\left[h(t)\right]_{\frac{\ln 2}{2}}^{x}=h(x)-h\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=h(x)-\frac{\pi}{4}$

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geqslant \frac{\ln 2}{2}$, on pose $F_n(x) = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} (f(t))^n \, dt$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{4}$.

$F_1(x) = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} f(t)dt = h(x) - \frac{\pi}{4}$.

Or $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

(b) Montrer que pour tout $t > 0$, $[f(t)]^2 = \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}$.

$[f(t)]^2 = \frac{1}{e^{2t} - 1} = \frac{1 \times e^{-2t}}{(e^{2t} - 1) \times e^{-2t}} = \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}$

Calculer alors $F_2(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x)$.

$F_2(x) = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} (f(t))^2 \, dt = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} \frac{2\, e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = \frac{1}{2} \left[\ln\left(1 - e^{-2t}\right) \right]_{\frac{\ln 2}{2}}^{x}$

$= \frac{1}{2} \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - e^{-2x}\right) + \frac{\ln 2}{2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \ln\left(1 - e^{-2x}\right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}$.

(c) Montrer que F_n est strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

La fonction $t \longmapsto (f(t))^n$ est continue sur $[\ln 2, +\infty[$ et $\ln 2 \in [\ln 2, +\infty[$

alors la fonction F_n est dérivable sur $[\ln 2, +\infty[$

et on a : $F_n'(x) = (f(x))^n > 0$ pour tout $x \in [\ln 2, +\infty[$.

Ainsi la fonction F_n est strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

(d) Vérifier que pour tout $t \geqslant \frac{\ln 2}{2}$, $f(t) \leqslant 2\, e^{-t}$.

$[f(t)]^2 - [2\, e^{-t}]^2 = \frac{e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} - 4\, e^{-2t} = e^{-2t} \left(\frac{1}{1 - e^{-2t}} - 4 \right) = e^{-2t} \left(\frac{-3 + 4\, e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} \right)$.

Pour tout $t > 0$, $e^{-2t} > 0$ et $1 - e^{-2t} > 0$.

$t \geqslant \frac{\ln 2}{2} \implies -2t \leqslant -\ln 2 \implies e^{-2t} \leqslant \frac{1}{2} \implies 4\, e^{-2t} \leqslant 2 \implies -3 + 4\, e^{-2t} \leqslant -1 \leqslant 0$.

Donc pour tout $t \geqslant \frac{\ln 2}{2}$, $[f(t)]^2 - [2\, e^{-t}]^2 \leqslant 0$.

Or $f(t) > 0$ et $2\, e^{-t} > 0$ donc pour tout $t \geqslant \frac{\ln 2}{2}$, $f(t) \leqslant 2\, e^{-t}$.

En déduire que $F_n(x) < \sqrt{2}$.

Pour tout $t \geqslant \frac{\ln 2}{2}$, $0 < f(t) \leqslant 1$ alors $[f(t)]^n \leqslant f(t) \leqslant 2\, e^{-t}$.

Donc $\int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} [f(t)]^n dt \leqslant \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} 2\, e^{-t} dt$.

équivaut à $F_n(x) \leqslant \left[-2\, e^{-t} \right]_{\frac{\ln 2}{2}}^{x}$.

équivaut à $F_n(x) \leqslant \sqrt{2} - 2\, e^{-x}$. Or $\sqrt{2} - 2\, e^{-x} < \sqrt{2}$ alors $F_n(x) < \sqrt{2}$.

c Montrer alors que F_n admet une limite finie u_n quand x tend vers $+\infty$.

F_n est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ sur $\left[\frac{\ln 2}{2},+\infty\right[$ alors F_n admet une limite finie u_n quand x tend vers $+\infty$

4 a Donner les valeurs de u_1 et u_2.

$u_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{4}$.

$u_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = \frac{\ln 2}{2}$.

b Vérifier que pour tout $t > 0$, $[f(t)]^{n+2} + [f(t)]^n = -f'(t)\cdot[f(t)]^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
[f(t)]^{n+2} + [f(t)]^n &= [f(t)]^n\left([f(t)]^2+1\right)\\
&= [f(t)]^n\left([f(t)]^2+1\right)\\
&= [f(t)]^n\left(\frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}+1\right)\\
&= [f(t)]^n\left(\frac{1}{1-e^{-2t}}\right)\\
&= [f(t)]^n\left(\frac{e^{2t}}{e^{2t}-1}\right)\\
&= [f(t)]^{n-1}\cdot f(t)\left(\frac{e^{2t}}{e^{2t}-1}\right)\\
&= [f(t)]^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}}\right)\left(\frac{e^{2t}}{e^{2t}-1}\right)\\
&= [f(t)]^{n-1}\cdot\left(\frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)\sqrt{1+e^{2t}}}\right)\\
&= -[f(t)]^{n-1}\cdot f'(t)
\end{aligned}$$

En déduire $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \frac{1-[f(x)]^n}{n}$.

www.kaynetweb.fr

$$\begin{aligned}
F_{n+2}(x)+F_n(x) &= \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} (f(t))^{n+2}\,dt + \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} (f(t))^{n}\,dt \\
&= \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} (f(t))^{n+2} + (f(t))^{n}\,dt \\
&= \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} -\left[f(t)\right]^{n-1}\cdot f'(t)dt \\
&= \left[-\frac{1}{n}\left[f(t)\right]^{n}\right]_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} \\
&= \frac{1}{n}\left[\left[f(t)\right]^{n}\right]_{x}^{\frac{\ln 2}{2}} \\
&= \frac{1}{n}\left(1-\left[f(t)\right]^{n}\right) \\
&= \frac{1-[f(x)]^{n}}{n}
\end{aligned}$$

ⓒ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2}+u_n = \dfrac{1}{n}$ et que u est décroissante en déduire que u est convergente et calculer sa limite.

$$\begin{aligned}
u_{n+2}+u_n &= \lim_{x\to+\infty} F_{n+2}(x) + \lim_{x\to+\infty} F_n(x) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \Big(F_{n+2}(x)+F_n(x)\Big) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-[f(x)]^{n}}{n} \\
&= \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant \dfrac{\ln 2}{2}$, on a : $0 < f(x) \leqslant 1$.

Donc $0 < \big(f(x)\big)^{n+1} \leqslant \big(f(x)\big)^{n1}$.

Alors $0 < \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} \big(f(x)\big)^{n+1}dx \leqslant \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{x} \big(f(x)\big)^{n}ds$.

D'où $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Par suite la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 car $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ et $f_n(x) \geqslant 0$.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $u_{n+2}+u_n = \dfrac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2}+u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $2\ell = 0$ par suite $\ell = 0$.

⑤ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+2} = \dfrac{(-1)^n}{2}\big(\ln 2 - v_n\big)$.

$$
\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k} \right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(u_{2k+2} + u_{2k} \right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_{2k+2} + 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_{2k} \\
&= 2\left(\cancel{u_4} - \cancel{u_6} + \cancel{u_8} + \cdots + \cancel{(-1)^{n-2} u_{2n}} + (-1)^{n-1} u_{2n+2} \right) + 2\left(u_2 - \cancel{u_4} + \cancel{u_6} - \cancel{u_8} + \cdots + \cancel{(-1)^{n-1} u_{2n}} \right) \\
&= 2(-1)^{n-1} u_{2n+2} + 2u_2
\end{aligned}
$$

Ainsi $v_n = 2(-1)^{n-1}u_{2n+2} + 2u_2$.

On multiplie chaque membre par $(-1)^n$ on obtient :

$(-1)^n v_n = -2u_{2n+2} + 2u_2(-1)^n$

donc $2u_{2n+2} = 2u_2(-1)^n - (-1)^n v_n = (-1)^n\sqrt{2} - (-1)^n v_n$

Par suite $u_{2n+2} = \dfrac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - v_n)$

En déduire que (v_n) est convergente et trouver sa limite.

$u_{2n+2} = \dfrac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - v_n)$ donc $|u_{2n+2}| = \dfrac{|(-1)^n|}{2}|\ln 2 - v_n| = \dfrac{1}{2}|\ln 2 - v_n|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\ln 2 - v_n| = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 - v_n = 0$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$